УДК 519.6:001.5
DOI https://doi.org/10.32838/2663-5941/2021.2-1/26

Левкін Д.А.
Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка

Бережна Н.Г.
Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка

Лук'янов І.М.
Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка

Левкін А.В.
Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка

МАТЕМАТИЧНИЙ ІНСТРУМЕНТАРІЙ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

У статті виконано математичне моделювання задачі термічної дії на багатошарові технічні системи. Авторами розроблено розрахункову математичну модель процесу дії, яка представляє собою нелокальну крайову задачу для системи еволюційних псевдодиференціальних рівнянь з інтегральною умовою. Наведений один із можливих підходів для чисельної реалізації розглянутих крайових задач. Розроблено дискретну модель оцінки стану багатошарових технічних систем, які містять локальні, зосереджені, дискретні джерела дії температурних полів. При цьому врахована багатошарова структура модельованих систем і специфічні особливості процесу дії. Технічні характеристики випромінювачів задані з урахуванням попередньої експертної оцінки параметрів систем.

Провівши дослідження крайових задач, авторами отримані і обґрунтовані умови коректності параболічних крайових задач для систем еволюційних диференціальних і псевдодиференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами у полісмузі. При цьому результати статті можливо без істотних змін використати для обґрунтування коректності крайових задач для систем псевдодиференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Застосування зазначених у роботі умов дозволить гарантувати існування і єдність розв'язків диференціальних рівнянь із крайових задач, що моделюють стан багатьох технічних, біотехнологічних, механічних та інших систем під дією джерел навантаження.

Як приклад широкого використання результатів цієї роботи автори стверджують про коректність розрахункових і прикладних оптимізаційних математичних моделей біотехнологічного процесу лазерної дії на ембріон. У статті наведені приклади кількох коректних крайових задач для систем диференціальних рівнянь. Результати досліджень можна застосовувати для підвищення якості автоматизації процесу моделювання та оптимізації багатошарових систем.

Ключові слова: *математична модель, крайова задача, псевдодиференціальні рівняння, коректність, оптимізація.*

Постановка проблеми. У зв'язку з нестандартною геометричною формою досліджуваних об'єктів і технічними характеристиками джерел дії на багатошарові технічні системи виникають певні труднощі при оптимізації таких систем. До них відноситься і проблема з існуванням єдиного розв'язку нелокальних крайових задач систем еволюційних диференціальних і псевдодиференціальних рівнянь, які описують стан досліджуваного об'єкта. Проблема коректності таких задач пов'язана, зокрема, з проблемою оцінки знаменників у правій частині основного диференціального рівняння. Нелокальні крайові задачі використовують при математичному моделюванні більшості технічних, механічних, гідродинамічних і біотехнологічних систем, які містять джерела навантаження фізичних полів.

Авторами статті визначено і теоретично обґрунтовано умови коректності нелокальних крайових задач для параболічних еволюційних диференціальних і псевдодиференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами у полісмузі. Наявність і виконання зазначених у цій роботі умов дозволяє гарантувати, наприклад, коректність розрахункової математичної моделі для ембріона під дією лазерним променем. Це дасть можливість підвищити якість біотехнологічного процесу трансплантації клітин за рахунок збільшення точності оптимізації параметрів випромінювачів. Застосування результатів наведених досліджень представлено на конкретних прикладах.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідженню нелокальних крайових задач для систем диференціальних і псевдодиференціальних рівнянь, здійсненню розрахунку та оптимізації параметрів технічних, біотехнологічних і транспортних систем присвячені наукові публікації [1–9]. У роботах [1; 2] отримані умови коректності задачі Коші для диференціальних і псевдодиференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами. Отриманий результат вдосконалений авторами публікації [3] для обґрунтування коректності крайових задач систем диференціальних рівнянь у полішлої.

Розв'язанню дискретних задач геометричного проектування присвячені результати роботи [4]. У публікації [5] наведені дослідження з використання лазерних технологій для підвищення експлуатаційної стійкості сталей і сплавів. Питання розрахунку й оптимізації технічних параметрів лазерних випромінювачів у багатошаровому мікробіологічному середовищі досліджені авторами роботи [6]. Наукові публікації [7; 8] містять питання щодо впливу кріоконсервування ембріонів на їхній стан перед подальшими маніпуляціями з клітинами. У публікації [9] здійснене моделювання динаміки протікання процесу обробки заявок на транспортне обслуговування і сам процес транспортного обслуговування в логістичних ланцюгах.

У цій публікації авторами визначені і досліджені умови коректності нелокальних крайових задач для систем параболічних еволюційних диференціальних і псевдодиференціальних рівнянь з інтегральною умовою у полішлої. Отримані результати проілюстровані на конкретних прикладах.

Постановка завдання. Метою статті є запропонувати умови коректності крайових задач з інтегральною умовою для систем параболічних еволюційних диференціальних і псевдодиференціальних рівнянь у полішлої, що дасть можливість гарантувати адекватність прикладних оптимізаційних математичних моделей для багатошарових технічних і біотехнологічних систем під дією джерел навантаження.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянемо крайові задачі:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A\left(t, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t), \quad 0 \le t \le T \\ \displaystyle\int_0^T B\left(t, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)\, d\mu(t) = \varphi(x) \end{cases} \tag{1}$$

і

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A\left(t, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) + f(x,t), \quad 0 \le t \le T, \\ \displaystyle\int_0^T B\left(t, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)\, d\mu(t) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

де $A\left(t, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ і $B\left(t, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ – псевдодиференціальні оператори із символами з простору нескінченно диференційованих функцій степеневого росту $C_{-\infty}^{\infty}$;

$\mu(t)$ – функція обмеженої варіації.

Подіявши перетворенням Фур'є за просторовими змінними, отримали такі крайові задачі:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}(s,t)}{\partial t} = A(t,s)\tilde{u}(s,t) \\ \displaystyle\int_0^T B(t,s)\tilde{u}(s,t)\, d\mu(t) = \tilde{\varphi}(s) \end{cases} \tag{3}$$

і

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}(s,t)}{\partial t} = A(t,s)\tilde{u}(s,t) + \tilde{f}(s,t) \\ \displaystyle\int_0^T B(t,s)\tilde{u}(s,t)\, d\mu(t) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

де перетворення Фур'є $\tilde{u}(s,t)$, $\tilde{\varphi}(s)$ і $\tilde{f}(s,t)$ належать простору узагальнених функцій S для будь-якого $t \in [0,T]$.

Розв'язок диференціального рівняння з крайової задачі (3) є таким:

$$\tilde{u}(s,t) = \left(\exp\int_0^t A(\tau,s)\, d\tau\right) \cdot \psi(s), \tag{5}$$

де $\psi(s)$ – довільна функція.

Підставивши розв'язок (5) в інтегральну умову з крайової задачі (3), отримали:

$$\int_0^T B(t,s)\left(\exp\int_0^t A(\tau,s)\, d\tau\right) d\mu(t) \cdot \psi(s) = \tilde{\varphi}(s) \tag{6}$$

Можливість розв'язання рівняння (6) досягається лише за виконання умови:

$$\Delta(s) = \int_0^T B(t,s)\left(\exp\int_0^t A(\tau,s)\, d\tau\right) d\mu(t) \ne 0 \tag{7}$$

Для того, щоб розв'язок $\tilde{u}(s,t)$ належав простору $C^1([0,T],S)$, необхідно і достатньо, щоб функція $Q(s,t) = \dfrac{\exp\int_0^t A(\tau,s)\, d\tau}{\Delta(s)}$ належала простору $C_{-\infty}^{\infty}$.

Отримали такий результат: задача (1) коректно вирішена з простору S у простір $C^1\left(\left[0,T\right],S\right)$, якщо $Q(s,t)\in C^{\infty}_{-\infty}$. До того ж, якщо у задачі (3) існує функція $Q(s,t)$, то у задачі (4) існує функція Гріна:

$$G(s,t,\tau)=\begin{cases}\int\limits_0^{\tau}B\left(\xi,s\right)Q\left(s,t-\tau+\xi\right)d\mu(\xi), & \tau\le t\\ -\int\limits_{\tau}^{T}B\left(\xi,s\right)Q\left(s,t-\tau+\xi\right)d\mu(\xi), & \tau>t.\end{cases} \quad (8)$$

Крім того, коректність задачі (3) зумовлює коректність задачі (4). Це дозволило дійти висновку, що для будь-якого рівняння із крайової задачі (1) із символом $A(t,s)\in C^{\infty}_{-\infty}$ існує така функція $B(t,s)\in C^{\infty}_{-\infty}$, що задача (1) коректно вирішена з простору узагальнених функцій S у простір $C^1\left(\left[0,T\right],S\right)$.

Розглянемо розрахункову математичну модель процесу лазерної дії на ембріон. Теплофізичні характеристики процесу задані з огляду на експертну оцінку параметрів випромінювачів, розподіл температурних полів розрахований за допомогою рівномірної сітки. Система диференціальних рівнянь теплопровідності:

$$\begin{cases}5.46\dfrac{\partial T_1}{\partial t}=0.71\left(\dfrac{\partial^2T_1}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r_1}\dfrac{\partial T_1}{\partial r}\right)+55;\\ 5.44\dfrac{\partial T_2}{\partial t}=0.96\left(\dfrac{\partial^2T_2}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r_2}\dfrac{\partial T_2}{\partial r}\right)+94.1;\\ 5.1\dfrac{\partial T_3}{\partial t}=0.91\left(\dfrac{\partial^2T_3}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r_3}\dfrac{\partial T_3}{\partial r}\right)+452.4.\end{cases} \quad (9)$$

Граничні умови початку та кінця лазерної дії:

$$\left[\begin{array}{l}T(0;0)=100\ {}^0C;\\ T(55;2800)=37\ {}^0C.\end{array}\right. \quad (10)$$

Граничні умови питомого теплового потоку:

$$-0,67\frac{\partial T_1}{\partial r}(0,t)=4,4. \quad (11)$$

Система диференціальних рівнянь із вказаної вище крайової задачі відповідає отриманим у цій роботі умовам коректності, а тому для розрахункової математичної моделі, яка описує ембріон під лазерною дією, існує єдиний розв'язок.

Наведемо кілька прикладів коректних крайових задач.

1. Розглянемо рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\left(2t-T\right)\Delta u(x,t)+c(t)u(x,t) \quad (12)$$

Функція $Q(s,t)$:

$$Q(s,t)=\frac{\exp\left(\left(Tt-t^2\right)s^2+\int\limits_0^t c(\tau)d\tau\right)}{\int\limits_0^T\exp\left(\left(Tt-t^2\right)s^2+\int\limits_0^t c(\tau)d\tau\right)dt} \quad (13)$$

Виконавши оцінку знаменника методом Лапласа, отримали:

$$Q(s,t)\underset{|s|\to+\infty}{\sim}\frac{|s|}{\sqrt{\pi}}\exp\int\limits_{T/2}^{t}c\left(\tau\right)d\tau\cdot\exp\left(-1\right)\left(t-\frac{T}{2}\right)^2|s|^2 \quad (14)$$

Отже, $Q(s,t)\in C^{\infty}_{-\infty}$ і задача буде коректно вирішеною з простору S у простір $C^1\left(\left[0,T\right],S\right)$.

2. Розглянемо більш загальне рівняння:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a(t)\Delta u(x,t)+\sum_{k=1}^{n}b_k(t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k}+c(t)u(x,t) \quad (15)$$

де $a(t)$, $b_k(t)$, $c(t)$ – дійсні неперервні функції на відрізку $\left[0,T\right]$.

Використавши результати попередніх досліджень, отримали, що крайова задача диференціального рівняння (15) з умовою:

$$\int\limits_0^T u\left(x_1-B_1(t),\ldots,x_n-B_n(t)\right)dt=\varphi(x) \quad (16)$$

де $B_k(t)=\int\limits_0^t b_k(\tau)d\tau$, $1\le k\le n$ буде коректно вирішеною з простору S у простір $C^1\left(\left[0,T\right],S\right)$.

3. Розглянемо крайову задачу:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=k\left(\dfrac{\partial^2u\left(x,t\right)}{\partial x^2}\right),\\ u\left(x,t_k-0\right)=u\left(x,t_k+0\right),\\ u\left(x,0\right)+\gamma u\left(x,T\right)=\varphi\left(x\right).\end{cases} \quad (17)$$

Подіємо перетворенням Фур'є за просторовими змінними:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\tilde{u}(s,t)}{\partial t}=ks^2\tilde{u}(s,t),\\ \tilde{u}\left(s,t_k-0\right)=\tilde{u}\left(s,t_k+0\right),\\ \tilde{u}\left(s,0\right)+\gamma\tilde{u}\left(s,T\right)=\tilde{\varphi}\left(s\right),\end{cases} \quad (18)$$

Функція $Q(s,t)$ має такий вигляд:

$$Q(s,t)=\begin{cases}\exp\left\{\left(t-t_0\right)\tilde{A}_1(s)\right\}\Delta^{-1}(s);\\ \exp\left\{\left(t-t_1\right)\tilde{A}_2(s)\right\}\Delta^{-1}(s)\exp\left\{t_1\tilde{A}_1(s)\right\};\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\ \exp\left\{\left(t-t_{n-1}\right)\tilde{A}_n(s)\right\}\Delta^{-1}(s)\exp\left\{t_1\tilde{A}_1(s)+\ldots+\left(t_{n-1}-t_{n-2}\right)\tilde{A}_{n-1}(s)\right\}.\end{cases} \quad (19)$$

З урахуванням, що $\tilde{A}_k(s)=-ks^2$, отримали:

$$Q(s,t)=\begin{cases}\exp\left(-ts^2\right)\Delta^{-1}(s);\\ \exp\left\{\left(t-\frac{T}{2}\right)\left(-2s^2\right)\right\}\Delta^{-1}(s)\exp\left(-\frac{Ts^2}{2}\right);\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\ \exp\left\{\left(t-\frac{(n-1)T}{n}\right)\left(-ns^2\right)\right\}\Delta^{-1}(s)\exp\left(-\frac{Ts^2(n-1)}{2}\right),\end{cases} \quad (20)$$

де $\Delta^{-1}(s)=1+\gamma\exp\left\{-\frac{Ts^2\left(n+1\right)}{2}\right\}$.

Тому при додатніх γ крайова задача коректна в просторі узагальнених функцій S, при від'ємних γ крайова задача не буде коректною.

4. Розглянемо крайову задачу:

$$\begin{cases}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{1-m}{2m}T\Delta u(x,t), \quad при \quad 0\le t\le\frac{T}{2m},\\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}T\Delta u(x,t), \quad при \quad \frac{\left(2m-1\right)T}{2m}\le t\le T,\\ u\left(x,\frac{T}{2m}-0\right)=u\left(x,\frac{T}{2m}+0\right),\\ u\left(x,\frac{\left(2m-1\right)T}{2m}-0\right)=u\left(x,\frac{\left(2m-1\right)T}{2m}+0\right),\\ \sum_{k=0}^{2m}u\left(x,\frac{kT}{2m}\right)=\varphi\left(x\right).\end{cases} \quad (21)$$

Покажемо, що крайова задача (21) коректна у просторі узагальнених функцій S. Подіявши перетворенням Фур'є за просторовими змінними на крайову задачу (21), отримали:

$$\begin{cases}\frac{\partial\tilde{u}(s,t)}{\partial t}=\frac{1-m}{2m}Ts^2\tilde{u}(s,t),\\ \frac{\partial\tilde{u}(s,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}Ts^2\tilde{u}(s,t),\\ \tilde{u}\left(s,\frac{T}{2m}-0\right)=\tilde{u}\left(s,\frac{T}{2m}+0\right),\\ \tilde{u}\left(s,\frac{\left(2m-1\right)T}{2m}-0\right)=\tilde{u}\left(s,\frac{\left(2m-1\right)T}{2m}+0\right),\\ \sum_{k=0}^{2m}\tilde{u}\left(s,\frac{kT}{2m}\right)=\tilde{\varphi}\left(s\right).\end{cases} \quad (22)$$

Функція $Q(s,t)$:

$$Q(s,t)=\frac{\exp\left\{-\left(t-t_{k-1}\right)\frac{k-m}{2m}Ts^2\right\}}{\sum_{k=0}^{2m}\exp\left\{-\sum_{j=0}^{k}\left(t_{j+1}-t_j\right)\frac{j-m}{2m}Ts^2\right\}}\in C_{-\infty}^{\infty}. \quad (23)$$

Отже, розглянута крайова задача коректна в просторі узагальнених функцій S.

Авторами удосконалені результати публікації [10] в частині урахування специфіки технологічного процесу термічної дії при побудові крайових задач. При цьому зазначимо про результати публікації [11], де розроблено динамічну модель затримок у прийнятті рішень у логістичній системі та запропоновано критерій підвищення надійності функціонування логістичної системи вантажних перевезень і вантажних підприємств. Деякі питання оптимізації технологічних систем розглянуті в публікації [12].

Результати проведених досліджень можуть бути використані для обґрунтування коректності низки прикладних оптимізаційних математичних моделей для багатошарових технічних, механічних, біотехнологічних та інших систем. Це дозволить підвищити точність розрахунку та оптимізації параметрів багатошарових систем, які містять джерела термічної дії.

Висновки. У статті наведений один із можливих алгоритмів для отримання розв'язку нелокальної крайової задачі систем еволюційних параболічних диференціальних і псевдодиференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами та інтегральною умовою.

Авторами визначені і детально досліджені умови коректності крайової задачі у просторі узагальнених функцій, що дало можливість гарантувати коректність крайових задач систем псевдодиференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Це дозволяє стверджувати про існування єдиного розв'яку багатьох розрахункових математичних моделей, які описують стан технічних, біотехнологічних, механічних та інших багатошарових систем. Результати дослідження продемонстровані на конкретних прикладах.

Список літератури:

1. Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. Обобщенные функции и уравнения в свертках. М. : Наука, 1994. 336 с.
2. Макаров А.А., Николенко И.Г. Частичная параболичность краевой задачи для псевдодифференциальных уравнений в слое. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка*. Харків, 2019. Т. 89. С. 21–32. DOI: 10.26565/2221-5646-2019-89-03.
3. Пташник Б.Й., Ількив В.С., Кмить І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. К. : Наукова думка, 2002. 416 с.
4. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К. : Наукова думка, 1986. 268 с.
5. Скобло Т.С., Мартыненко А.Д., Бантковский В.А., Гончаренко А.А., Сайчук А.В., Тихонов А.В., Лысенко С.В. Использование лазерных технологий для упрочнения и восстановления изделий из сталей и сплавов. *Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів.* 2019. № 15. С. 142–162.
6. Douglas-Hamilton D.H., Conia J. Thermal effects in laser-assisted pre-embryo zona drilling. *Journal of Biomedical Optics*. 2001. Vol. 6, Issue 2. P. 205. DOI: 10.1117/1.1353796.
7. Smolyaninova Y.I., Shigimaga V.A., Kolesnikova A.A., Popivnenko L.I., Todrin A.F. Electric conductivity and resistance of mouse oocyte membranes to effect of pulsed electric field in cryoprotectant solutions. *Problems of Cryobiology and Cryomedicine*. 2018. Vol. 28, № 4. P. 311–321. https://doi.org/10.15407/cryo28.04.311.
8. Shakhova Yu.Yu., Paliy A.P., Paliy A.P., Shigimaga V.O., Kis V.M., Ivanov V.I. Use of multicomponent cryoprotective media during cryopreservation of murine embryos by vitrification. *Problems of Cryobiology and Cryomedicine*. 2020. Vol. 30, № 2. P. 203–206. https://doi.org/10.15407/cryo30.02.203.
9. Кутья О.В. Розробка динамічної моделі затримок прийняття рішень у логістичних ланцюгах міських вантажних перевезень. *Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів.* 2019. № 16. С. 37–47.
10. Levkina R., Levkin A., Petrenko A., Kolomiets N. Current approaches to biotechnology in animal husbandry. International Journal of Advanced Science and Technology. 2020. Vol. 29, Issue 8 Special issue. Pp. 2463–2469.
11. Volkov V., Taran I., Volkova T., Pavlenko O., Berezhnaja N. Determining the efficient management system for a specialized transport enterprise. *Scientific Bulletin of National Mining University*. 2020. Vol. 4. P. 185–191. https://doi.org/10.33271/nvngu/2020-4/185.
12. Skoblo T.S., Sidashenko O.I., Saichuk O.V., Klochko O.Y., Levkin D.A. Influence of Stresses on Structural Changes in Gray Cast Iron. *Materials Science*. 2020. Vol. 56, Issue 3. P. 347–358.

Levkin D.A., Berezhna N.G., Lukyanov I.M., Levkin A.V. MATHEMATICAL TOOLS FOR APPLIED PROBLEMS SOLVING

Mathematical modeling of the thermal action problem on multilayer technical systems is performed in this article. The authors developed a computational mathematical model of the action process which is a non-local boundary value problem for a system of evolutionary pseudo-differential equations with an integral condition. One of the possible approaches for numerical realization of the considered boundary value problems is given.

A discrete model for estimating the state of multilayer technical systems that contain local, concentrated, discrete sources of temperature fields has been developed. In this case, the multilayer structure of the simulated systems and the specific features of the action process are taken into account. The technical characteristics of radiators are set proceeding from the preliminary expert estimation of parameters of the systems.

Having studied the boundary value problems, the authors obtained and substantiated the conditions for the correctness of parabolic boundary value problems for systems of evolutionary differential and pseudodifferential equations with the constant coefficients in the polyslayer. In this case, the results of the article can be used without significant changes to justify the correctness of boundary value problems for systems of pseudo-differential equations with variable coefficients. The application of the conditions specified in this article will guarantee the existence and the uniqueness of differential equations solutions from boundary value problems that simulate the state of many technical, biotechnological, mechanical and other systems under the action of load sources.

The application of the conditions specified in this article will guarantee the existence and the uniqueness of differential equations solutions from boundary value problems that simulate the state of many technical, biotechnological, mechanical and other systems under the action of load sources. As an example of the wide use of the results of this work, the authors argue about the correctness of the calculated and applied optimization mathematical models of the bio-technological process of laser action on the embryo. The article gives examples of several correct boundary value problems for systems of differential equations. The research results can be used to improve the quality of automation of the modeling process and optimization of multilayer systems.

Key words: *mathematical model, boundary value problem, pseudodifferential equations, correctness, optimization.*